

# Chapitre 1

## Acoustique musicale

### 1.1 Acoustique et musique

La plus faible oscillation de pression perceptible par notre système auditif (d'amplitude  $p_a^0 = 2.10^{-5}$  Pa ou  $0\text{dB}_{\text{SPL}}$ ) peut véhiculer plaisir et émotion au travers de la musique. Les instruments de musique sont les outils de cet art et les facteurs se sont appliqués au cours des siècles à les rendre les plus expressifs possibles, pour répondre à la demande des instrumentistes et du public.

Cette demande recouvre des aspects aussi différents que le besoin de justesse tonale, de régularité du timbre, de facilité de jeu et, pour atteindre de grandes audiences, de puissance sonore. Les contraintes auxquelles doit faire face le luthier sont d'ordre mécanique (robustesse, élasticité des matériaux) et pratique (l'instrument doit être facilement jouable). Le résultat est, pour les instruments courants, affiné par des siècles de recherches empiriques d'améliorations de facture. Une des questions que se pose l'acousticien musical est de comprendre le sens de ses améliorations, pour les systématiser ou pour les sélectionner.

Un exemple frappant de développement de cette recherche est la facture composite. Les techniques de mesure des paramètres élastiques des bois de lutherie ont permis de sélectionner et de dimensionner les sandwichs composites (polyuréthane et carbone) destinés à la fabrication d'instruments à corde (familles du violon et de la guitare).

Outre ce champ d'application concernant l'optimisation de la facture instrumentale, l'acoustique musicale s'intéresse à la synthèse musicale, à la perception des son musicaux (psychoacoustique) et à l'acoustique des salles de concert.

Dans ce document, nous développons plus particulièrement les aspects liés aux instruments à cordes. Plus de détails et la modélisation d'autres type d'instruments pourra être trouvé dans "Physics of musical Instruments" (Fletcher et Rossing, Springer).

### 1.1.1 Gammes et tempérament

On trouve dès la préhistoire des témoignages de la sensibilité musicale humaine. Colocalisés dans des grottes, on a pu mettre à jour des phalanges de rennes servant de sifflet et des signes gravés à des emplacements correspondants à des résonances acoustiques de la grotte.

C'est cependant Pythagore qui découvre les premières lois de consonance. Le son est perçu comme plus agréable lorsque plusieurs cordes qui vibrent en même temps ont leur longueur dans des rapports simples.

Il est intéressant alors de remarquer que les notes que nous percevons comme "le plus consonantes" sont dans un rapport d'octave, soit un rapport 2 sur les fréquences fondamentales. C'est pour ce rapport que le nombre d'harmoniques communes entre les deux sons est le plus grand. En poursuivant cette idée, on trouve successivement l'harmonique 3 (quinte, ou note Sol si la note de référence est un Do), la double octave et la tierce — harmonique 5. Et l'accord ainsi produit est connu comme *l'accord parfait majeur*.

Notre oreille supporte mal un mauvais accord de ces notes "consonantes". C'est pourquoi un facteur de piano commence toujours par accorder les octaves. Mais comment accorder les autres notes? Une solution consiste à accorder les quintes en parcourant un cycle : on peut passer du Do au Do en incrémentant d'une quinte à chaque fois. On parcourt ainsi le *cycle des quintes*, représenté sur la figure 1.1. La gamme obtenue est dite Pythagoricienne.

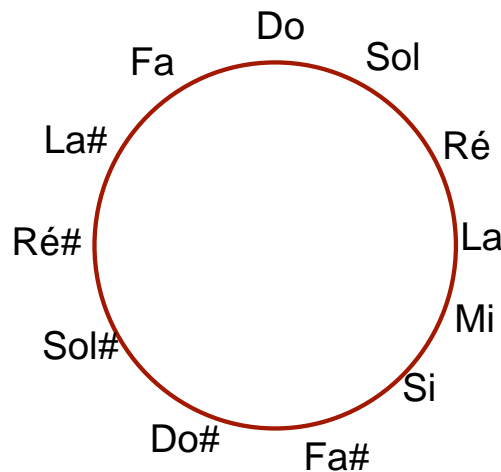


FIG. 1.1 – Représentation du cycle des quintes

Cette gamme n'est pourtant pas utilisée car si toutes les quintes sont justes alors les octaves sont fausses ! En effet augmenter d'une quinte revient à multiplier la fréquence par le facteur  $3/2$ . Pour revenir au Do il faut donc multiplier la fréquence de départ par  $(3/2)^{12} = 129.74$ . Or pour les 7 octaves parcourues on trouve un rapport  $2^7 = 128$ . L'erreur commise est appelé *comma Pythagoricien*.

Les tempéraments visent à répartir l'erreur sur les quintes pour garder les octaves justes. Ils sont parfois dédiés à un type d'instrument (clavecin par exemple). Mais le système le plus couramment adopté consiste à répartir cette erreur sur les douzes demi-tons de manière homogène. Le rapport entre une note et son demi-ton immédiatement supérieur sera donc :

$$\alpha = 2^{\frac{1}{12}}$$

### 1.1.2 Evolution de la facture de la guitare

L'évolution de la facture de la guitare depuis les instruments primitifs jusqu'à l'esthétique sonore optimisée des instruments contemporains illustre bien la recherche artisanale empirique effectuée par les facteurs pour améliorer les qualités sonores et mécaniques.

La mythologie mentionne la lyre d'Hermès, faite d'une carapace de tortue et d'une corne de chèvre sur lesquelles étaient fixée des boyaux de moutons. Cette description convient également à un instrument de fabrication Hittite (1350 av. JC). Cependant c'est en Chine qu'on trouve les vestiges d'un instrument à cordes possédant tous les éléments des instruments modernes. Le Yuan (III ou IVème siècle ap. JC) possède en effet une table, un fond et des éclisses.



FIG. 1.2 – Photo du Yuan (Chine, IIIème siècle ap. JC)

On imagine que les introductions du luth et de la Qitara en Europe sont liées aux invasions arabes et dès le IXème siècle on trouve des représentations dans les livres d'heures. Un des plus célèbres exemples est celui du Psautier de Stuttgart : l'instrument possède un manche, une caisse et les cordes sont accrochées sur un chevalet. Il est joué indifféremment au plectre, au doigt ou à l'archet.

Au XIIIème siècle en Espagne apparaissent deux importants membre de la famille : la *guitarra moresca*, qui ressemble à un luth mais sonne plus aigu et *guitarra latina* qui ressemble à une viole avec un long manche et qui sonne entre le luth et la *guitarra moresca*. La *guitarra moresca* est souvent décriée pour ses sonorités stridentes (elle est souvent jouée au plectre). La *guitarra latina* quant à elle possède une sonorité plus douce car elle est jouée au doigt, elle

est plus proche de la guitare moderne. Elle reste cependant difficile à jouer et réservée aux professionnels (menestrels).



FIG. 1.3 – Représentation de la guitarra moresca et de la guitarra latina

Le vrai ancêtre de la guitare moderne est cependant la *vihuela* espagnole ou la *viola* italienne. Elle peut se jouer à l'archet, avec un plectre ou à la main (*vihuela de mano*). Elle possède déjà une table d'harmonie en épicéa mais elle est sujette à des difficultés d'accordage (gamme de Pythagore diatonique puis placement "à l'oreille" des demi-tons) et ce d'autant plus qu'elle comporte deux cordes par note.

Au début du XIV<sup>ème</sup> siècle, l'instrument devient populaire en France et en Angleterre. On en trouve alors de nombreuses représentations dans les ouvrages religieux. La forme de l'instrument n'est alors pas fixée et les facteurs font preuve de beaucoup d'ingéniosité dans la décoration.



FIG. 1.4 – Représentation issue du psautier de Tenison (Londre, 1384)

Vers la fin du XVI<sup>ème</sup> siècle *guitarra* et *vihuela* se confondent, la *guitarra* étant en général considérée comme une petite *vihuela*. A cette époque la popularité qu'a connu l'instrument au début du siècle s'est largement estompée, et il lui faudra attendre le milieu du XVII<sup>ème</sup>

pour retrouver des lettres de noblesse.

La vihuela devient obsolète au début du XVIIème. Sous l'influence du luth, le nombre de choeurs de la guitare passe à 5. Un choeur désigne un rang de une ou plusieurs cordes. Un des membres fameux de la famille des guitares à 5 cordes (doublées) est la *chitarra battente* dont les cordes sont en métal. La solidité accrue de l'instrument permet une tension plus grande des cordes et par suite lui confère davantage de puissance sonore; d'où sa popularité car elle peut accompagner chants et danses. A cette époque, se développent de célèbres écoles de Luthiers en Europe, hors des espagnols et des italiens. Les écoles de Paris et de Hambourg sont les plus connues.



FIG. 1.5 – Représentation d'une *chitarra battente*

Déclins et renouveaux se succèdent ensuite, la guitare devenant un instrument d'amateurs rejetée par les auteurs de musique savante dans la première partie du XVIIIème. Dans sa deuxième moitié, des traité de technique du jeu et des améliorations techniques (frettes fixes, premiers barrages, moins d'ornements qui laissent la table d'harmonie vibrer plus librement) lui redonne de l'éclat. Enfin l'instrument va définitivement être adopté grâce à l'abandon des cordes doublées (moins de problèmes d'accord et donc plus d'expression possible) et ajout d'une corde dans le grave qui augmente la gamme d'expression de l'instrument. On arrive ainsi à la guitare à 6 cordes simples.

Vers la fin du XVIIIème, la cinq cordes (doublées) a disparu au profit de la 6 cordes simples. A partir du milieu de ce siècle, de gros changements dans les techniques de constructions vont mener à la guitare actuelle au début du XIXème. D'une part les italiens et les français imposent le modèle à 6 cordes simples accordées au tempérament égal et d'autre part les espagnols réalisent les plus gros progrès en utilisant de nouvelles essences (bois de rose, cyprès) pour le fond et les éclisses et surtout en adoptant les premiers un barrage de la table d'harmonie "en éventail". Celui-ci conserve une bonne rigidité à la table tout en améliorant notablement l'efficacité acoustique. Les frets du manche descendent à présent jusqu'à la rose.

Le luthier espagnol Antonio de Torres est considéré comme l'inventeur de la guitare moderne. C'est de lui que viennent la plupart des caractéristiques de construction utilisées aujourd'hui; pour les dimensions et les techniques d'assemblage. Les principales difficultés dans la facture de la guitare sont d'obtenir un instrument d'une puissance convenable et qui "chante" bien (clarté des aigus notamment). A. de Torres a fait et démontré beaucoup pour cela :

- le corps de l'instrument est agrandi et ces proportions fixées; en particulier la hauteur

- de la table et la profondeur du manche. Le volume de la cavité est ainsi mieux adapté.
- Il améliore les dimensions du manche (plus large, plus épais) ce qui lui confère une plus grande facilité de jeu
  - Il améliore sensiblement les techniques de barrage de la table, avec le barrage à 7 barres en éventail 1.6



FIG. 1.6 – Barrage à 7 barres en éventail de A. de Torres

## 1.2 Familles d'instruments et modes de production sonore

La classification usuelle des instruments de musiques de l'orchestre repose sur des groupements par similarité de construction et de mode de jeu, tels que présenté dans le tableau 1.1.

Ces subdivisions font essentiellement référence à la manière dont sont construits les instruments et à la manière dont ils sont joués. Cependant, si on s'intéresse à un aspect plus caractéristique du son émis, une autre séparation peut être faite entre les sons dits *entretenus* et les sons dits *libres*.

Un violoncelle dans son mode de jeu normal (non pizzicato) nécessite un mouvement continu de l'archet frottant sur la corde. Le son d'une flûte s'obtient en soufflant sans discontinuer dans son embouchure. Ces deux exemples se classent dans la catégorie des sons entretenus : le musicien doit fournir de l'énergie pendant toute la durée de la note.

Le son d'une guitare, une fois la corde lâchée, décroît pendant la vibration, jusqu'à son extinction. De même pour la corde de piano après que le marteau a frappé la corde. Le son d'un gong, après avoir été frappé par la mailloche, ne dépend plus du musicien. Ces instruments sont classés dans les instruments à son libres : une fois excité, le son produit s'éteint en fonction des caractéristiques dissipatives de l'instrument. Le musicien n'intervient dans le timbre produit, uniquement lors de l'interaction initiale.

Catégorie	Famille	Spécificités	Exemples
Cordes	pincées	clavier autres	clavecin, clavinet balalaïka, banjo, lyre guitare, harpe, mandoline, luth,
	frottées		violon, alto, violoncelle, contrebasse, viole
	frappées	clavier	piano
Vents	cuivres	embouchures	clairon, cor, trompette, cornet, trombone, tuba
	bois	anches simples anches doubles	clarinettes, saxophones basson, cor anglais, hautbois
	autres	bouche et bec clavier : tuyaux ou lames  bouche : lames	flûtes Accordéon, harmonium, orgue harmonica
Percussion	membranes		Tambour, caisse, timbale, tam-tam
	autres	mélodiques  non mélodiques	vibraphone, carillon, celesta, xylophone triangle ,cymbales, gong, congas, maracas

TAB. 1.1 – *Classification des instruments*

**Modèles de production.** Les instruments de musique sont destinés à la production sonore : ils incorporent le plus souvent un élément efficace du point de vue du rayonnement acoustique comme par exemple la table d'harmonie d'une guitare ou d'un violoncelle ou encore le pavillon d'une trompette.

Lorsque ces instruments sont mélodiques, ils associent une structure résonnante capable de produire un spectre tel que le son produit induise une sensation de hauteur tonale pour notre système perceptif. Cette structure résonnante est souvent un système vibrant unidimensionnel siège d'ondes stationnaires comme une corde fixée à ses extrémités ou un tuyau acoustique. Ces deux systèmes, en raison des modes propres de vibrations mécaniques ou acoustiques dont ils sont le siège, produisent un spectre quasi-harmonique. Dans ce spectre on trouve un fondamental et des multiples ou quasi-multiples de ce fondamental et notre oreille réagit à ce stimulus en reconnaissant une hauteur tonale située sur ce fondamental (*i.e.* si on chante la note entendue, on chante à la même fréquence que le fondamental).

Pour les instruments à son non entretenu (ou libre), l'interaction avec le musicien, généralement brève, apporte une réserve d'énergie initiale (potentielle si la vitesse initiale est nulle comme lorsqu'on lâche une corde de guitare). Cette énergie est par la suite consommée par la vibration mécanique de l'instrument et par (échauffement interne), par le rayonnement acoustique (flux énergétique vers l'extérieur), et par frottement visqueux dans l'air.

Les instruments à son entretenu sont en général excités par une interaction non linéaire : frottement de l'archet sur la corde d'un violon, oscillations d'un jet d'air autour du biseau d'une flûte ou séquence de collement/décollement des lèvres dans l'embouchure d'une trompette. Cette excitation non linéaire fournit l'énergie du système résonnant qui y est couplé : corde du violon, tube acoustique de la flûte, etc...

### 1.3 Systèmes vibrants

Dans cette section, nous abordons la modélisation physique des instruments, et plus particulièrement des instruments à cordes.

Les notions utilisées sont l'acoustique et la mécanique des milieux continus (solides et fluides). Cependant, le cadre de ce cours sera limité aux descriptions modales et les équations d'évolution des systèmes seront obtenues sans faire appel au formalisme Lagrangien.

Les vibrations mécaniques et acoustiques sont les sources de production sonore des instruments de musique. De nombreux instruments peuvent être ramenés à des paradigmes de structures mécaniques. La table d'harmonie d'une guitare ou d'un piano est bien représentée par une plaque en flexion, une cloche est assimilable à une coque alors que les flûtes ou les orgues sont des tubes acoustiques.

Ces éléments mécaniques peuvent vibrer. Cette vibration, dans un cadre de description linéaire auquel nous nous tiendrons ici, se ramène à une superposition d'oscillateurs élémentaires.



### 1.3.1 Rappels sur les systèmes simples

#### Régime libre

L'oscillateur harmonique simple non amorti (masse-raideur) est décrit par une équation d'évolution en vibration libre déduite de la seconde loi de Newton :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.1)$$

la solution pour une vitesse initiale  $v_0 = 0$  et une position initiale  $x_0$  est oscillante :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \quad (1.2)$$

à la pulsation  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Cette solution fait apparaître les rôles antagonistes de la masse et de la raideur sur la fréquence naturelle de l'oscillateur : augmentation pour une raideur plus grande et baisse pour une augmentation de masse. En généralisant, on peut prévoir ainsi que l'ajout d'une masse sur une structure vibrant fait faire décroître ses fréquences naturelles. L'oscillation trouvée correspond à des échanges d'énergie potentielle et cinétique. L'énergie potentielle est emmagasinée par le ressort et la vitesse de la masse gouverne son énergie cinétique.

L'ajout d'un modèle de perte par frottement visqueux (amortisseur) amène à une équation en oscillation libre de la forme :

$$\ddot{x} + (\lambda/m)\dot{x} + \omega_0 x = 0 \quad (1.3)$$

qui, pour un système résonnant (i.e. en dessous de l'amortissement critique, en régime pseudo-périodique) amène à une solution du type :

$$x = e^{-\alpha t} \cos(\omega_a t + \phi) \quad (1.4)$$

avec  $\alpha = \lambda/(2m)$ . La fréquence naturelle de l'oscillateur amorti est donc plus faible que celle de l'oscillateur correspondant sans pertes :  $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ .

Il est à noter que le facteur d'amortissement  $\alpha$ , encore appelé *taux de décroissance* qui caractérise l'extinction de la vibration est déterminant pour la reconnaissance du timbre des instruments et des matériaux : le bois est plus amorti que l'aluminium ou le verre. L'inverse du facteur d'amortissement est le temps de décroissance noté  $\tau = 1/\alpha$ . Il est habituel de caractériser l'amortissement des oscillateurs par un facteur adimensionnel : le facteur de qualité  $Q$ . Ce facteur mesure le rapport entre la force de rappel élastique et la force de frottement soit, dans le cas où le système est peu amorti ( $\omega_a \approx \omega_0$ ) :

$$Q = \frac{k}{R\omega_0} = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\lambda} \quad (1.5)$$

Cette dernière expression rend compte des influences opposées d'un côté de la masse et de la raideur et de l'autre du frottement. L'énergie mécanique n'est plus conservée au cours du mouvement et sa vitesse de décroissance est donnée par :

$$\frac{dE_m}{dt} = -2\alpha m v^2 \quad (1.6)$$

## Régime forcé de l'oscillateur amorti

Ce régime correspond à l'ajout d'un terme de force extérieure  $f(t)$  dans le second membre de l'équation 1.3. Sa description permet d'introduire, en notation complexe (forçage harmonique en  $e^{j\omega t}$ , la notion d'impédance mécanique. Cette notion provient de l'analogie formelle existant entre les systèmes mécaniques et électriques lorsqu'on réalise les substitutions :

- Force  $\longleftrightarrow$  Tension
- Vitesse  $\longleftrightarrow$  Courant

L'impédance mécanique s'écrit donc comme le rapport des grandeurs complexes associées à la force et à la vitesse :

$$Z_m = \frac{F}{V} \quad (1.7)$$

Elle se calcule à partir de l'équation 1.3 avec second membre :

$$Z_m = R_m + jX_m = \lambda + j\left(\omega m - \frac{k}{j\omega}\right) \quad (1.8)$$

la résistance mécanique traduit les pertes par frottement (équivalent de l'effet joule) alors que la *réactance* mécanique  $X_m$  contient les éléments réactifs de l'impédance, et dont le passage à zero gouverne la *résonance* ( $\omega = \omega_0$ ). Cette résonance est d'autant plus aiguë que le facteur de qualité  $Q$  est élevé (sa bande passante relative  $2\delta f/f_0 = 1/Q$ ).

**Comportement BF et HF de l'oscillateur forcé.** Selon la valeur de  $\omega$  par rapport à la résonance, on distingue trois régime de fonctionnement :

- $\omega \ll \omega_0$ : l'oscillateur est dominé par sa raideur. L'amplitude de déplacement tend vers son déplacement statique (obtenu en appliquant une force  $f$  indépendante du temps);
- $\omega = \omega_0$ : résonance. L'oscillateur est purement résistif;
- $\omega \gg \omega_0$ : l'oscillateur est dominé par sa masse, son amplitude de vibration tend vers zero quand la fréquence augmente.

**Remarque :** on représente habituellement l'inverse de  $Z_m$  en fonction de la fréquence  $f$ .  $Y_m = 1/Z_m$  est l'admittance mécanique et la résonance fait apparaître un maximum de  $Y_m$ .

**Transitoire.** Lorsqu'une force harmonique à la pulsation  $\omega$  est appliquée au temps  $t = 0$  initial, le régime stationnaire n'est pas atteint instantanément. Le mouvement qui le précède est la *réponse transitoire* du système et fait intervenir les deux fréquences  $\omega$  et  $\omega_0$ . Il s'écrit sous la forme:

$$x = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega_a t + \phi_1) + B \sin(\omega t + \phi_2) \quad (1.9)$$

On en déduit deux remarques, importante pour la réalisation de mesures en régime forcé sur les structures vibrantes :

1. le régime transitoire fait intervenir des battements entre la fréquence d'excitation et la fréquence de résonance,

2. moins le système est amorti est plus le régime transitoire est long.

En pratique, les mesures de résonances des structures vibrantes s'effectuent à l'aide d'une excitation fournie par un pot vibrant ou un système électromécanique (aimant fixé à la structure + bobine à induction) et l'amplitude de vibration est relevée à l'aide d'un accéléromètre. Il est nécessaire d'attendre l'extinction du transitoire pour relever l'amplitude de la réponse du système.

### 1.3.2 Modes propres

La description en terme de modes propres d'une structure vibrante en régime linéaire de vibration permet de décomposer le mouvement complet de la structure sur des formes élémentaires ou modes propres, qui se comportent comme des oscillateurs simples. Les masses et raideurs correspondantes sont réparties sur toute la structure mais on leur trouve des équivalents : les masses et raideurs modales. Les systèmes discrets linéaires (*i.e.* qui contiennent un nombre fini d'éléments mécaniques simples) possèdent également un nombre fini de modes propres. Nous nous intéressons ici, aux systèmes continus. Ceux-ci possèdent un nombre infini de degrés de liberté et par suite un nombre infini de modes propres. Pour les cas que nous traiterons, l'ensemble des modes propres sera dénombrable, indexé avec un nombre d'index correspondant aux nombres de dimensions de vibration (1 pour une corde, 2 pour une plaque mince et 3 pour une salle).

#### Mise en évidence expérimentale

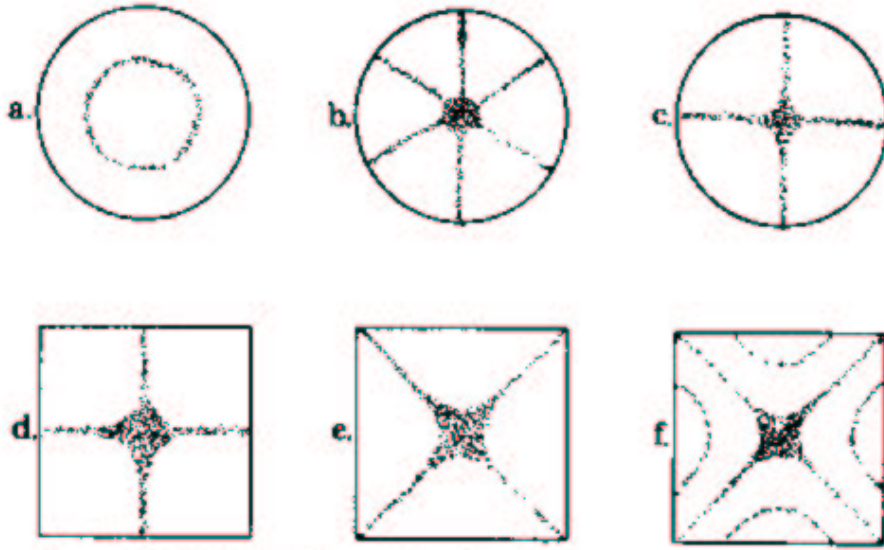
Lorsqu'il étudia différents sons musicaux, Ernst Chladni (1756-1827) fit une expérience désormais classique pour mettre en évidence l'effet de vibrations forcées harmoniques aux résonances d'une structure vibrante. On saupoudre de sable très fin une plaque de métal et on la met en vibration avec un archet de violon. L'archet glisse et colle alternativement en succession rapide sur le bord de la plaque. En plaçant les doigts à des endroits choisis, on bloque la vibration en ces endroits, créant des noeuds de vibration. Les ondes créées par le frottement de l'archet se réfléchissent sur les bords de la plaque et un système d'onde stationnaire s'établit. Il en résulte des figures symétriques de lignes nodales où le sable vient s'accumuler : les figures de Chladni. La figure 1.7 montre ce type de figure pour une plaque maintenue en son centre et à bords libres.

Ces figures correspondent à un mouvement vibratoire harmonique de la plaque sur une de ses fréquences propres. Le mode propre obtenu possède une géométrie bien définie. La nomenclature utilisée pour décrire ces modes s'appuie sur le nombre de lignes nodales rencontrées dans une dimension : le mode correspondant à la figure (b) de 1.7 est le mode (3,0).

#### Présentation théorique

La vibration des milieux élastiques en régime linéaire est décrite dans le cas général par un système d'équation aux dérivées partielles qu'on peut regrouper sous la forme :

$$\ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x},t) + \mathcal{L}\mathbf{y}(\mathbf{x},t) = \mathbf{F} \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.10)$$



**Figure 9-1.** Chladni figures showing different vibration patterns for square and circular plates.

FIG. 1.7 – Figures de Chladni pour des plaques carrée et ronde maintenue au centre

complétée par des conditions aux limites :

$$\mathcal{B}\mathbf{y}(\mathbf{x},t) = 0 \quad \mathbf{x} \in \delta\Omega \quad (1.11)$$

où  $\mathbf{y}$  est le champ vectoriel des déplacements (inconnues cherchées),  $\mathbf{x}$  le vecteur position et  $\mathbf{F}$  le champ des efforts extérieurs.  $\Omega$  désigne l'ensemble du domaine occupé par la structure au repos et  $\delta\Omega$  sa frontière. L'opérateur  $\mathcal{L}$  regroupe des opérateurs différentiels en espace, *linéaires*.

Les modes propres sont obtenus en régime de vibrations libres, c'est à dire pour  $\mathbf{F} = 0$ . On se restreint maintenant au cas des structures minces comme les plaques vues plus haut. L'inconnue est un champ de déplacement transverse scalaire. Les solutions sont recherchées en séparant les variables :

$$y(\mathbf{x},t) = \psi(\mathbf{x})q(t) \quad (1.12)$$

En introduisant cette expression dans l'équation 1.10 et regroupant les termes, on obtient :

$$-\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \frac{\mathcal{L}\psi(\mathbf{x})}{\psi(\mathbf{x})} = \text{cte} = \omega^2 \quad (1.13)$$

**Remarque :**

1. La séparation des variables est la technique mathématique qui permet de résoudre le problème. Ces solutions représentent néanmoins la réalité physique des ondes stationnaires, liées à l'imposition de conditions aux limites en espace;
2. la constante de l'équation 1.13 est nécessaire pour garder une solution physique stable.

Dès lors la solution temporelle est de la forme :

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (1.14)$$

Ce résultat, relié à celui obtenu en 1.13, montre que le comportement vibratoire est celui d'un oscillateur simple. La déformée spatiale doit vérifier quant à elle :

$$\mathcal{L}\psi(\mathbf{x}) = \omega^2 \mathbf{x} \quad (1.15)$$

et les conditions aux limites. Ces conditions imposent une suite infinie discrète de valeurs pour  $\omega$ . Soient  $\omega_n, n \in \mathbb{N}$ . L'équation 1.15 est une équation au valeur propre de l'opérateur  $\mathcal{L}$ . Les fonctions propres solutions sont des fonctions  $\psi_n(\mathbf{x})$  associées aux valeurs propres  $\omega_n$ . Ces fonctions  $\psi_n(\mathbf{x})$  décrivent la déformation du système associée à une vibration libre à la pulsation  $\omega_n$ .  $\psi_n(\mathbf{x})$  est la *déformée modale* et  $\omega_n$ , la pulsation modale.

La grandeur  $y_n(\mathbf{x}, t) = \psi_n(\mathbf{x})q_n(t)$  constitue l'écriture mathématique d'un *mode propre* de la structure. On montre que l'ensemble de ces modes propres constitue une base sur laquelle on peut décomposer le mouvement. Notamment, ces modes sont orthogonaux entre eux :

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle = \iint_{\Omega} \psi_n(\mathbf{x})\psi_m(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0 \quad \forall n \neq m \quad (1.16)$$

## Déformées modales

De part et d'autre d'une ligne nodale, les surfaces vibrantes vibrent en opposition de phase, ce qu'on peut constater en promenant un micro au voisinage de la surface. La figure 1.8 représente quelques unes de ces déformées pour une plaque circulaire encastrée.

Ce formalisme modal permet de traiter indifféremment le cas de vibrations 1-D, 2-D ou 3-D. Il permet également d'aborder les problèmes de couplage entre structures, qui sont à la base du fonctionnement de nombreux instruments de musique. Ainsi les instruments à corde fonctionnent à l'aide du couplage entre cordes et table d'harmonie.

## 1.4 Modélisation des instruments à cordes

Nous allons nous intéresser ici plus particulièrement aux instruments à cordes à son non entretenu. Dans cette catégorie rentrent le piano, la guitare et le clavecin mais pas la famille des cordes frottées. Dans cette famille, l'excitation forcée est produite par le frottement de l'archet sur les cordes.

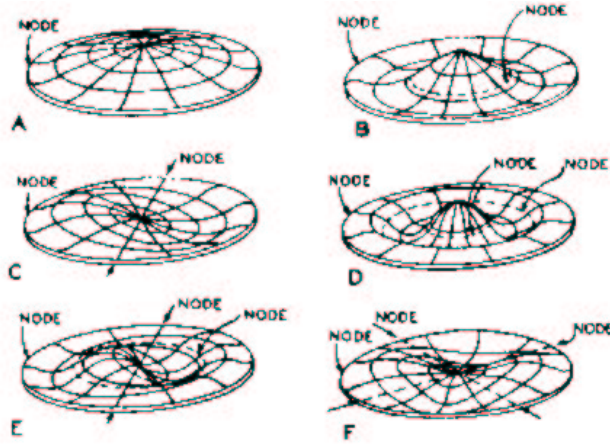


FIG. 1.8 – Déformées modales d'une plaque circulaire encastrée, d'après H.F. Holson, **Musical Engineering**. La figure (A) correspond au mode (0,0), (B) au mode (0,1) alors que (E) est (1,1)

### 1.4.1 Principe général

Les instruments à cordes fonctionnent par transmission de la vibration des cordes vers un résonateur dont les caractéristiques permettent un rayonnement acoustique plus efficace. En effet, une corde seule rayonne peu d'énergie acoustique. La corde de Mi Grave de la guitare classique par exemple a sa fréquence fondamentale à 82.5Hz. La longueur d'onde correspondante dans l'air est de plus de 3m, très grande devant les dimensions caractéristiques de la corde (son rayon) ce qui confère à la source acoustique correspondante un caractère dipolaire ou multipolaire, peu efficace en terme d'énergie rayonnée.

### 1.4.2 Cordes vibrantes

Ce paragraphe permet d'illustrer la description modale faite plus haut et est l'occasion de revenir sur des propriétés de propagation des ondes unidimensionnelles.

En se référant à la figure 1.9, l'équation de propagation s'obtient à l'aide de la deuxième loi de Newton et de considérations géométriques qui fournissent deux équations couplées, en projection sur l'axe y pour de faibles déplacements :

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial F_y}{T_0 \partial t} \quad (1.17)$$

où  $F_y$  est la projection sur Oy de  $F$  la force exercée par l'élément précédent sur l'élément  $dx$ .  $F_y$  est encore appelée *effort tranchant*.  $v$  représente la projection de la vitesse sur l'axe y,  $v = \dot{y}$ ,  $\mu$  est la masse linéique de la corde et  $T_0$  sa tension. L'élimination de l'effort tranchant dans le système 1.17 conduit à l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{c^2 \partial x^2} = 0 \quad (1.18)$$

avec  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ . La solution de cette équation de D'Alembert s'obtient en factorisant l'opérateur

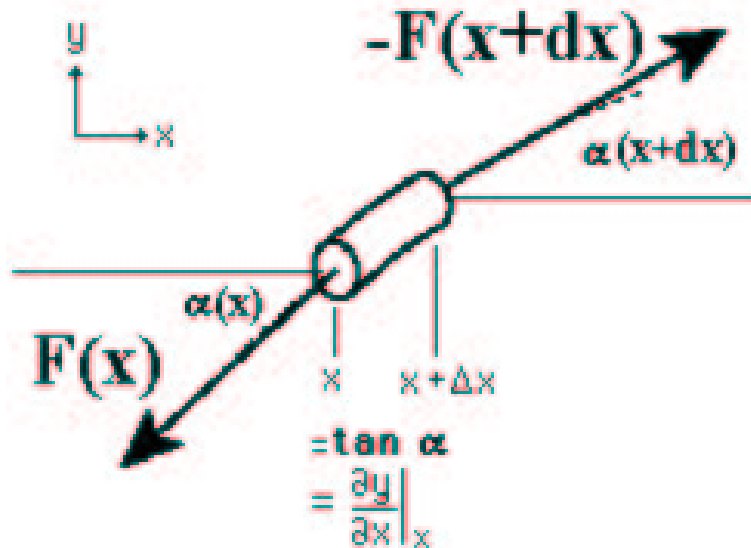


FIG. 1.9 – Corde vibrante : données du problème

différentiel, et est la superposition d'une onde progressive et d'une onde rétrograde :

$$y(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (1.19)$$

### Commentaires

**Analogies avec les lignes de transmission.** Le système d'équation couplées 1.17 est formellement équivalent à celui qu'on obtient lorsqu'on traite la propagation des ondes de courant et de tension dans les lignes de transmission électriques sans pertes. Avec les correspondances force-tension et vitesse-courant, la masse linéique  $\mu$  est l'équivalent d'une inductance  $L_e$  par unité de longueur de câble et  $1/T_0$  l'équivalent d'une capacité  $C_e$  par unité de longueur. Ce résultat permet par exemple de retrouver  $c = 1/\sqrt{L_e C_e}$  et d'introduire l'impédance mécanique caractéristique de la ligne mécanique  $Z_c = \sqrt{\frac{L_e}{C_e}} = \sqrt{T_0 \mu}$ . Cette impédance est égale au rapport force/vitesse pour une onde progressive. Cette analogie a trouvé une application dans une méthode de synthèse sonore : la synthèse à lignes de transmission. On pourra se reporter par exemple à pour une application au piano.

**Réflexions à l'extrémité.** Nous considérons ici les deux cas extrêmes : réflexion sur une extrémité fixe ou réflexion sur extrémité libre.

1. Cas extrémité fixe. On suppose la corde fixée en  $x = L$ , soit  $f(L - ct) = -g(L + ct)$ ,  $\forall t$ . Les ondes progressive et rétrograde sont en opposition de phase en  $x = L$ . Cela signifie qu'une onde progressive arrivant en  $L$  se réfléchit avec déphasage de  $\pi$ .
2. Cas extrémité libre. La force exercée en  $L$  est nulle. Ce qui entraîne  $\frac{\partial y}{\partial x}|_{x=L} = 0$ . On en déduit  $f'(L - ct) = -g'(L + ct) \forall t$ . Par intégration par rapport au temps et en fixant la constante d'intégration à zéro (elle est non significative) on trouve alors  $f(L - ct) = g(L + ct)$ . La réflexion se fait sans changement de signe.

3. le cas intermédiaire le plus courant est celui d'un faible mouvement en  $x = L$  et est traité par la suite.

**Analyse temporelle.** Les résultats précédents permettent de construire le mouvement d'une corde pincée sans pertes, fixée au deux extrémités. Cette configuration est choisie parce qu'elle constitue une première approche du fonctionnement de la guitare.

La réflexion de l'onde aller se fait avec déphasage de  $\pi$ . En tenant compte des réflexions aux deux extrémités, on voit que le mouvement global peut être directement déduit de la solution 1.19 où l'onde aller et retour sont des ondes de longueur d'onde  $2L$  obtenues par antisymétrie autour de  $x = L$ . Au temps  $t = 0$ , en tenant compte des vitesses initiales nulles, on montre facilement que

$$f(x) = g(x) = \xi(x)/2 \tag{1.20}$$

où  $\xi(x)$  est la déformée initiale de la corde.

Le mouvement est alors construit par itération sur le temps  $t$ . La figure 1.10 montre 4 instants successifs de ces itérations pour une corde pincée au tiers.

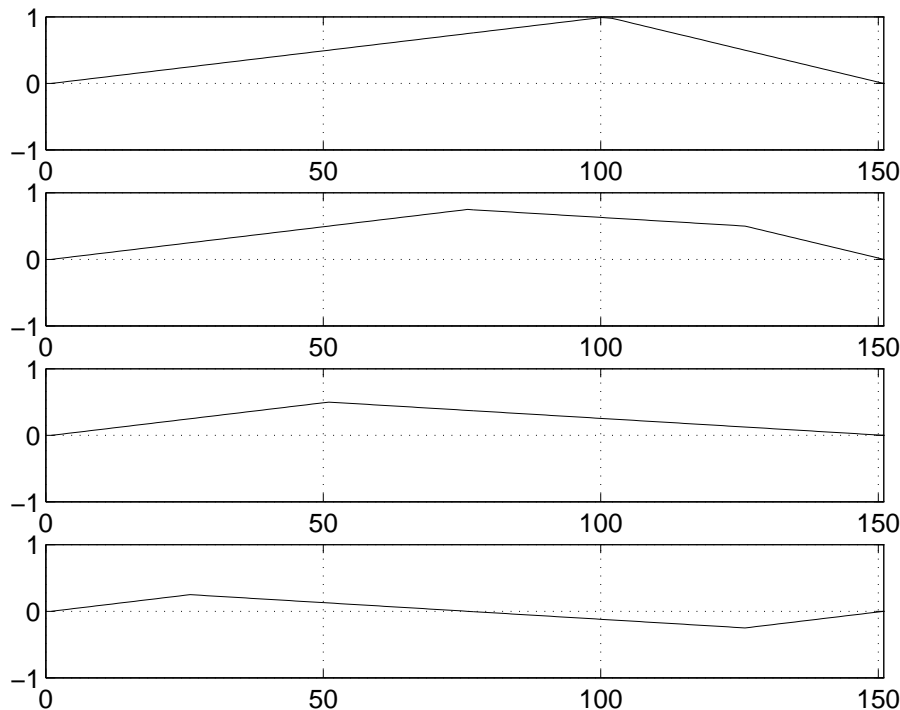


FIG. 1.10 – Déformée d'une corde après pincement au tiers, calculée à partir de la superposition de l'onde aller et retour. La déformée est représentée à 4 instants successifs

On remarque la propagation des points anguleux, qui est le corollaire de l'angle constant de la corde en  $x = L$  durant la première partie du cycle. Dans la deuxième cet angle change de signe. Comme la projection sur l'axe  $y$  de la déformée est proportionnelle à la force exercée au chevalet, on en déduit que cette force est une forme d'onde carrée avec un rapport cyclique de  $1/3$ .



**Modes et spectre.** Dans l'équation de d'Alembert de propagation des ondes les opérateurs différentiel en espace et en temps ont même forme. Il s'en suit d'après 1.14 que les modes propres ont des formes sinusoïdales. La forme même des solutions impose une périodicité égale pour  $x$  et pour  $ct$  ce qui amène la relation bien connue entre la longueur d'onde et la période  $\lambda = cT$ .

En écrivant alors les conditions aux limites  $y = 0$  aux extrémités  $x = 0$  et  $x = L$ , on obtient les valeurs discrète de fréquences propres  $\omega_n/(2\pi) = f_n = n(c/2L)$ .

Le mouvement global de la corde résulte de la superposition des réponses modales, de la forme :

$$y(x,t) = \sum_n A_n \cos(\omega_n t + \phi_n) \sin(k_n x) \quad (1.21)$$

Il est cependant plus pratique pour visualiser ce mouvement d'utiliser l'analyse temporelle précédente. La forme des solutions à l'équation de d'Alembert nous apprend d'autre part que le contenu spectral en temps est le même (à un facteur) que celui en espace. La décomposition en série de Fourier de la forme d'onde initiale suffit donc à nous renseigner sur le spectre du son émis. Or une forme d'onde carrée de rapport cyclique  $1/P$  ne contient pas toutes les harmoniques de rang multiple de  $P$ . Ce résultat donne lieu à une conclusion importante du point de vue du musicien : un pincement au tiers de la corde élimine toutes les harmoniques spatiale de rang multiples de 3 et par suite de même pour les harmoniques temporelles. Ce phénomène, qui explique pourquoi les sons produit par un pincement près du chevalet sont plus "riches" ou "moins ronds" que ceux produits par un pincement au niveau de la rose, est désigné par *la réjection des modes*.

### 1.4.3 Comment traiter le couplage au chevalet?

Le modèle de corde idéal tel que présenté ci-dessus ne prend pas en compte :

- les effets de raideur
- les effets de propagation longitudinale
- les effets de mobilité du chevalet

Dans ce paragraphe nous traitons de ce dernier effet. Notons que sans cette mobilité, la puissance transmise à la table d'harmonie est nulle. Le modèle simple est donc insuffisant.

Pour représenter le couplage de la corde au chevalet, on utilise la notion d'admittance mécanique décrite plus haut. Les déplacements restent faibles et par conséquent l'admittance mécanique (rapport vitesse/force en complexe) sera également faible au chevalet. Ceci s'exprime par

$$Z_c Y_m \ll 1 \quad (1.22)$$

où  $Z_c$  est l'impédance caractéristique de la corde telle qu'introduite plus haut. En calculant, pour un mode propre de la forme  $y_0 \sin(kx)e^{j\omega t}$  le rapport vitesse/force et en l'égalant à l'admittance du chevalet  $Y_m$  en  $x = L$  on en déduit l'équation :

$$\tan(kl) = jZ_c Y_m \quad (1.23)$$

avec  $k = \omega/c$ . En posant  $k = k_n + \delta k$  et en développant au premier ordre on en déduit une perturbation des pulsations propres :

$$\delta\omega_n = c\delta k_n = j\frac{\omega_0}{\pi}Y_m Z_c \quad (1.24)$$

où  $\omega_0$  représente le fondamental. Le caractère complexe de  $\delta\omega$  ne doit pas nous étonner : la mobilité du chevalet déplace la fréquence propre (partie imaginaire de  $Y_m$ ) mais également introduit de l'amortissement (partie réelle de  $Y_m$ ). En effet, la mobilité du chevalet traduit bien un flux énergétique transmis vers le corps de l'instrument et donc un flux sortant du point de vue de la corde. De fait, ce type de pertes énergétique du système est le mécanisme prépondérant de dissipation dans la vibration de la corde d'une guitare (devant les frottements dans l'air et les frottements internes).

#### 1.4.4 Quelques propriétés de la guitare

Ce paragraphe reprend les commentaires des documents fournis en cours.

**Flux énergétiques par domaines fréquentiels.** La corde de guitare ne rayonne que peu d'énergie directement car ses dimensions caractéristiques sont faibles devant la longueur d'onde du son émis (source dipolaire). On peut ainsi, en schématisant séparer les rôles des divers éléments de l'instrument en fonction de leur capacité à rayonner dans certain domaines de fréquence : cavité pour les plus basse, table d'harmonie puis chevalet pour les plus hautes (dimensions relativement aux longueurs d'onde).

**Effet de la forme de l'excitation sur le spectre.** L'analyse du spectre vue plus haut montre qu'une excitation avec un plectre fin va produire une forme d'onde initiale contenant des fréquences spatiales élevées. Le spectre du signal temporel contiendra donc également des fréquences élevées.

**Résonateur de Helmholtz** Il est tentant d'assimiler le volume de la caisse à un résonateur de Helmholtz : la cavité joue le rôle d'une raideur de part la compressibilité du volume d'air et d'autre part la partie d'air située au voisinage de la rose joue le rôle de masse. Si ce volume augmente la raideur diminue et la fréquence propre diminue et si le diamètre de la rose augmente, la masse augmente et la fréquence propre diminue là encore. Dans la réalité, il n'existe pas de résonance de Helmholtz au sens strict : les résonances qui interviennent aux alentours de 100 Hz font participer au mouvement les éclisses et le fond.

**Rayonnement acoustiques** La mesure des diagrammes de directivité des divers modes propres est réalisée en chambre sourde. Elle fait apparaître clairement deux sources monopolaires pour les deux modes les plus graves et une source dipolaire puis quadripolaire pour des deux principaux suivant. La connaissance de ces directivités est essentielle pour le preneur de son, qui doit équilibrer le timbre de sa prise.

### 1.4.5 Quelques propriétés du piano

Deux phénomènes relatifs aux cordes sont à prendre en compte pour la facture et l'accord des pianos : l'inharmonicité due à la raideur des cordes et les modes longitudinaux de vibration.

**Inharmonicité** L'origine de ce phénomène tient dans la raideur des cordes réelles et particulièrement celle du piano qui sont en acier. Cette raideur se manifeste par un couple de rappel lorsqu'on cherche à courber la corde.

L'ajout des termes correspondants dans l'équation du mouvement conduit à

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - ES K^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (1.25)$$

où  $E$  est le module d'Young (qui mesure l'allongement relatif lors d'un essai de traction) et  $S$  et  $K$  des paramètres géométriques (surface et rayon de giration). La résolution de cette équation lorsque le terme de raideur de flexion reste faible a été opérée par Morse (1948). Les fréquences propres sont alors données par :

$$f_n = n f_0 \sqrt{1 + \beta n^2} \approx n f_0 (1 + 1/2 \beta n^2) \quad (1.26)$$

L'intervalle fréquentiel augmente lorsque le rang de l'harmonique augmente. Cette *inharmonicité* est d'une grande importance pour les accordeurs de piano. Pour minimiser les battements entre les harmoniques des notes graves et les notes aiguës, il sont amenés à "tirer les aiguës vers le haut et les graves vers le bas".

**Modes longitudinaux** Leur existence est une conséquence de la loi d'élasticité linéaire de Hooke. Cette loi exprime la proportionnalité entre la contrainte exercée sur un système (force par unité de surface) et sa déformation. Si on tire ainsi dans la direction  $x$  sur un tube plein de section  $S$  avec une force  $F$  l'allongement relatif produit s'écrit :

$$\frac{F}{S} = E \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.27)$$

où  $w$  désigne l'allongement par rapport à une position initiale. En considérant le bilan des forces appliquées ( $F(x + dx) - F(x)$ ) on montre qu'on obtient une équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.28)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du matériau. La vitesse de propagation de ces ondes vaut  $c_l = \sqrt{E/\rho}$ . Dans le cas général elle est indépendante de la valeur de célérité des ondes transverses.

Ces modes sont particulièrement perceptibles pour les notes graves du piano. L'accord plus ou moins grand avec les fréquences des autres harmoniques (de vibration transverse) contribue grandement au timbre de l'instrument.

# Chapitre 2

## Synthèse sonore

### 2.1 Introduction

La synthèse sonore regroupe l'ensemble des procédés et algorithmes destinés à produire des sons musicaux. Une présentation détaillée en est donnée dans (Roads 98) Ces procédés peuvent être différenciés selon qu'ils sont fondés,

1. sur une analyse/synthèse d'un *modèle de signal* : on construit des *formes d'onde* qui sont ensuite utilisées pour fabriquer le son. Exemples :
  - synthèse additive : le son est reconstruit en additionnant des composantes élémentaires comme les partiels d'un son de cloche;
  - synthèse granulaire : c'est un cas particulier de synthèse additive mais cette fois les formes élémentaires sont localisées en temps et en fréquence;
  - synthèse à table d'onde : le son est reconstruit par rééchellonnage en temps et/ou fréquence de formes d'onde élémentaires contenues en mémoire;
2. sur une analyse/synthèse de *modèle de production* : on choisit les paramètres d'un modèle mettant en relation des éléments sources et des opérateurs. Exemples :
  - synthèse par modulation de fréquence (FM) : on connecte des opérateurs élémentaires tels que oscillateurs, additionneurs, gains et tables de lecture pour produire le son. La cascade de deux oscillateurs sinusoïdaux produit une configuration élémentaire de synthèse FM;
  - synthèse source/filtre;
3. sur la discrétisation d'un modèle physique de fonctionnement d'un instrument. Cette synthèse, dite *par modèle physique*, vise à reproduire le comportement réel de l'instrument via une description mathématique en terme de source, d'équations d'évolution (ou de propagation) et de conditions aux limites.
  - synthèse par discrétisation des équations de propagation (différences finies ou éléments finis), description physique de l'interaction avec la source et simulation du rayonnement acoustique;
  - synthèse par lignes de transmission : adaptées aux propagations mono-dimensionnelle comme les cordes (méthode de Karplus-Strong), les instruments à vent (tubes acoustiques); vents

Certains algorithmes de synthèse évolués font appel à plusieurs types, interconnectés comme par exemple le logiciel CORDIS-ANIMA (ACROE, Grenoble) qui permet d'assembler empiriquement divers éléments physiques élémentaires ou encore MODALYS (Ircam, Paris) qui permet de travailler avec des modèles physiques de structures mécaniques (cordes, tubes, plaques) décrits par analyse modale.

**Compromis entre précision et expressivité** La qualité d'une synthèse est habituellement mesurée sur deux critères : sa *précision* qui juge de sa capacité à ressembler perceptivement à un son réel et son *expressivité* qui est reliée à la variabilité spectrale et temporelle des sons produits. La plupart des synthèses ne parviennent pas à satisfaire à ces deux critères. La synthèse additive par exemple, peut être excellente en précision mais reste en générale pauvre du point de vue de l'expression (le contenu spectral ne varie que peu avec la force d'excitation). En revanche la synthèse FM est réputée pour sa richesse expressive (sa non linéarité intrinsèque lui confère une grande variabilité de timbre) et la possibilité de fabriquer des sons inouïs dans le monde réel mais elle reste inopérante pour produire un son de piano acoustique. La synthèse par modèle physique contourne ce compromis expressivité/précision mais cette double performance est obtenue au prix d'une complexité accrue. Cependant cette complexité est de moins en moins hors de portée de la puissance des micro-ordinateurs actuels. C'est pourquoi les "softsynths" actuels s'intéressent à ce type de technique qui est un des fer de lance de la recherche scientifique sur le sujet.

Historiquement, la synthèse FM et la synthèse par table d'onde sont les plus anciens et le plus développés commercialement. La première parce qu'elle produit des sons riches et expressifs pour une faible complexité de calcul, la deuxième en raison de l'abaissement des coûts de la mémoire. Une tendance des "softsynths" actuels est de simuler les anciens synthétiseurs analogiques (Moog, Roland Jupiter, Prophet 5) en proposant des modules élémentaires interconnectables et une variété d'effets (filtres, boucles, ...). A côté de ces free (WaveCraft) ou sharewares (VAZ, Virtual Waves, Reaktor, Rebirth), on trouve d'autres logiciels qui intègrent une partie "modèles physiques" (Tassman, Attack).

## 2.2 Synthèse FM

Cette méthode de synthèse, décrite initialement dans (Chowning 73), est basée sur principe de la *modulation de fréquence*. Elle est très répandue notamment via les composants Yamaha qui lui sont dédié (OPL2, OPL3, OPL4) implantés sur de nombreuses cartes son grand public.

### 2.2.1 Principe

A l'origine la modulation de fréquence fut utilisée dans les système de communication radio. La porteuse est alors une onde électromagnétique dont la fréquence ( $\approx 100$  MHz) est bien au delà de la limite supérieure des fréquences audibles. L'idée de Chowning est d'étendre cette technique pour une porteuse et une modulante dont les fréquences sont du même ordre de grandeur et plus particulièrement, sont dans un rapport simple (1:1, 1:2, 1:4, etc...).

L'écriture mathématique est celle d'une modulation de phase :

$$\phi(t) = 2\pi f_p t + I \sin(2\pi f_m t)$$

Il est à noter que cette modulation de phase correspond à la fréquence instantanée

$$f_i(t) = f_p + I f_m \cos(2\pi f_m t)$$

Le signal temporel obtenu est donné ci-dessous, ainsi que son développement en série trigonométrique :

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\phi(t)) \\ &= A J_0(I) \sin(2\pi f_p t) \\ &\quad + A \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(I) \sin(2\pi(f_p + n f_m)t) \\ &\quad + A \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(I) (-1)^n \sin(2\pi(f_p - n f_m)t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

L'expression 2.1 permet de comprendre l'intérêt du procédé : génération de spectres riches et rapidement variables (il suffit de moduler  $I$ ) avec seulement deux oscillateurs et la possibilité de créer des spectres harmoniques donc pouvant être assimilés à des sons musicaux.

On note que l'amplitude de la  $n$ -ième raie latérale est réglée par la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $n$ . Ces fonctions sont représentées figure 2.1 pour  $n=0,1$  et  $5$ .

De l'expression 2.1 et de la représentation 2.1 découlent plusieurs remarques :

- Les fonctions  $J_n(I)$  ressemblent à des ondulations amorties et retardées d'autant plus que  $n$  est grand. Les bandes fréquentielles latérales seront donc d'autant plus larges que l'index  $I$  est grand et l'amplitude des raies "en bout de bande" tend vers zéro.
- lorsque les bandes latérales sont suffisamment larges, les composantes sont reflétées (repliées) par rapport à la fréquence nulle. Si elle sont en opposition de phase avec les composantes non reflétées, elle peuvent les atténuer ou les annuler. Dans le cas d'une implantation numérique, ce phénomène est également présent autour de la fréquence de Nyquist.

Le schéma de la figure 2.2 montre la variation du spectre avec l'index de modulation.

## 2.2.2 Construction d'un système de synthèse fm

Une manière classique de représenter les systèmes est de les décomposer en *opérateurs* interconnectés. Un opérateur comprend en général un élément *oscillateur* principal alimenté par deux entrées — enveloppe du son et fréquence instantanée —. Cet oscillateur est paramétré par sa forme d'onde (sinus, carré, dent de scie, etc...) et sa fréquence centrale (porteuse). Sa représentation schématique est donnée figure 2.3. Le chip OPL3 de Yamaha rend possible

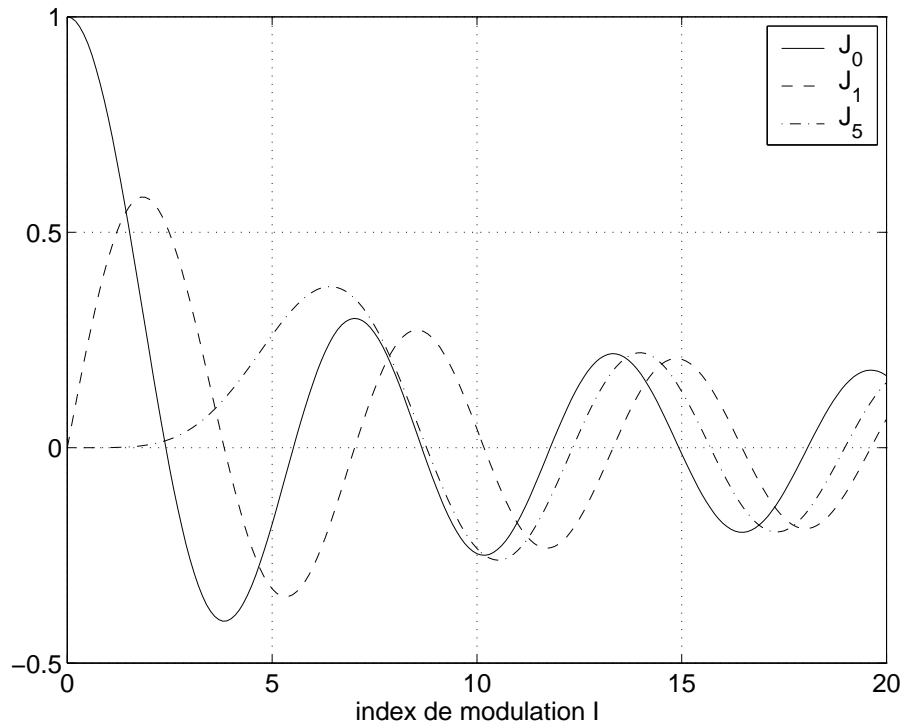


FIG. 2.1 – Fonction de Bessel de première espèce pour  $n=0,1$  et  $5$

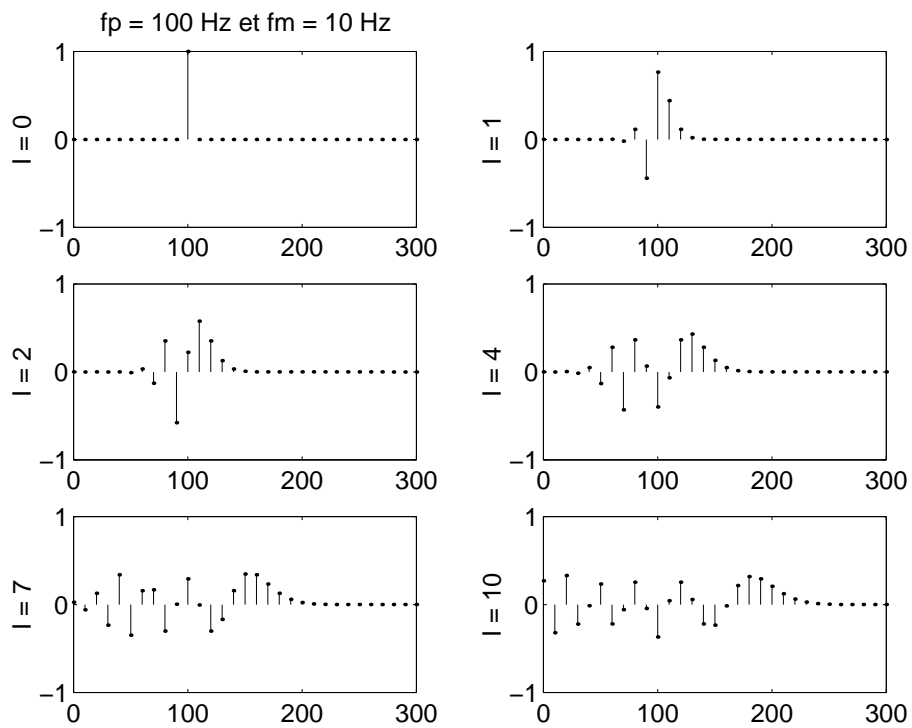


FIG. 2.2 – Spectre de la modulation fm simple (sinus-sinus) en fonction de l'index de modulation et tenant compte de la phase des composantes.

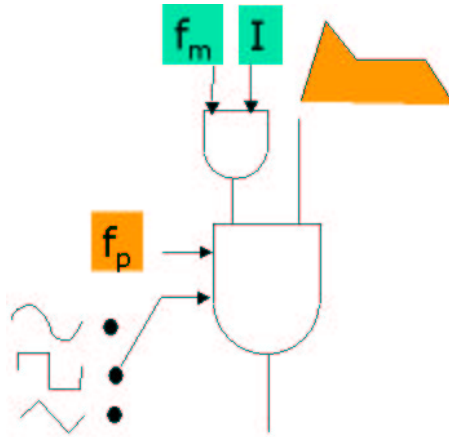


FIG. 2.3 – Représentation schématique d'un oscillateur

l'interconnexion de 4 opérateurs selon 4 schémas possibles : 1-2-3-4, 1 + 2-3 + 4, 1-2 + 3-4, 1 + 2-3-4.

L'enveloppe du son est décrite habituellement par quatre segments: attaque (A), décroissance (D), sustain (S) et extinction (R pour "release"). Ce qui est traditionnellement représenté sous la forme donnée figure 2.4. Si cette représentation est commode et très utilisée,

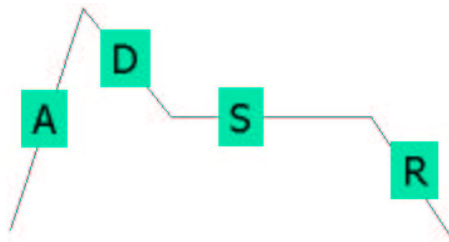


FIG. 2.4 – Représentation d'une enveloppe ADSR

il faut garder à l'esprit que les segments sont en fait des branches exponentielles de la forme  $a^n, a < 1$  pour les parties décroissantes et  $1 - a^n$  pour l'attaque.

**Application musicale.** La synthèse FM est célèbre pour sa capacité à produire des sons cuivrés. On utilise pour cela un rapport  $f_p:f_m$  égal à 1:1 et un index compris entre 0 et 7. Le rapport 1:2 produit des harmoniques impaires qui sont caractéristique des sons boisés tel que la clarinette ou le saxophone.

### 2.2.3 Possibilités étendues

2 compléments étendent les possibilités de la synthèse FM telle que décrite ci-dessus.

- la FM multiporteuses. L'utilisation de plusieurs opérateur dont les porteuses respectives ne sont pas aux mêmes fréquences permet de mieux contrôler l'enveloppe spectrale, chacun des oscillateurs produisant une partie plus spécifique de ce spectre;



- le bouclage des oscillateurs. Ce bouclage s'opère d'un opérateur sur lui-même ou selon des schémas cascades plus complexes. Son effet est une "régularisation" timbre.

## 2.3 Synthèse à table d'onde

Avec la synthèse FM, ce type de synthèse est le plus utilisé commercialement, présent sur la plupart des cartes son d'entrée de gamme du commerce. Son principe est celui d'un dictionnaire de formes d'onde élémentaires, comportant une ou plusieurs périodes et stockées en mémoire morte. L'utilisation courante de ces tables d'onde consiste alors à les relire à l'aide d'un index (souvent appelé phase) fractionnaire cyclique pour réaliser la transposition de hauteur.

### 2.3.1 Enregistrement des formes d'onde et repliement

La constitution d'une table d'onde de  $N = 256$  échantillons pour obtenir un signal carré doit se prémunir contre le repliement spectral. La solution simple

$$x(n) = \mathbf{1}_{[0 \ N/2]} - \mathbf{1}_{[N/2+1 \ N]}$$

en comporte puisque la série de Fourier de cette forme d'onde présente des raies aux harmoniques  $n$  impaires pour  $n \in \mathbb{N}^+$ . Les harmoniques de rang  $n \geq 125$  sont repliées. Ce repliement peut paraître faible (il correspond à des amplitudes d'harmonique inférieures d'au moins 40 dB à celle du fondamental) mais il peut devenir fortement audible lorsque hauteur de la note jouée augmente.

Plusieurs solutions co-existent pour pallier ce problème :

- les formes d'ondes sont enregistrées en limitant le nombre d'harmoniques (souvent on limite leur fréquence réduite à la valeur maximale de 1/4),
- on reconstruit la sortie en interpolant les échantillons de manière à approximer la formule de reconstruction (Shannon) ou, au moins à réaliser un filtrage qui limite le repliement lors du rééchantillonnage.

### 2.3.2 Transposition de hauteur et interpolation

**Procédé asynchrone.** Une solution simple quoique que coûteuse en matériel consiste à attribuer un CNA par voies (par note). Ce procédé est dit asynchrone car les horloges de chaque voies sont alors indépendantes. Si cette solution a été appliquée dans le passé (jusque vers le milieu des années 80) elle est abandonnée maintenant. En effet, elle souffre de plusieurs désavantages: on ne peut pas faire de post-traitement en numérique sur la sortie puisque le mixage des voies est réalisé en analogique et d'autre part, toutes les caractéristiques temporelles sont rendues proportionnelles à la période de la note jouée. Par exemple les attaques vont dépendre de la note ce qui est peu réaliste dans de nombreux cas.

**Interpolation** Ce procédé consiste à rééchantillonner la table d'onde avant de l'envoyer vers le CNA. De cette manière le mixage et les effets peuvent être réalisés en numérique et un seul CNA est nécessaire par canal analogique.

Les procédés classiques en traitement du signal numérique de sous/sur-échantillonnage ( $L$ -interpolateur + filtre +  $M$ -décimateur) ne sont pas envisageables en général en raison de la complexité requise : les valeurs de  $L$  et  $M$  ainsi que la synthèse du filtre doivent être modifiées à chacune des notes jouée.

Les procédés les plus couramment utilisés pour réaliser cette fonction sont les interpolations de la table d'onde. Aucun filtrage n'est réalisé préalablement et par conséquent, la décimation effectuée provoque du repliement.

**Phase incrémentale fractionnaire** L'interpolation la plus simple consiste à parcourir la table d'onde, à l'aide d'un index cyclique (modulo la longueur de la table), incrémenté par une valeur fixe fractionnaire, correspondant au rapport souhaité des périodes. La numérisation impose d'utiliser la partie entière de cet index. L'opération réalisée est alors un blocage d'ordre 0. L'effet spectral de blocage est connu : modulation du spectre par la fonction  $T_e \text{sinc}(\pi f T_e)$ . Le signal reconstitué en sortie s'écrira alors :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(t-n) \star \mathbf{1}_{[0T_e]}(t) \quad (2.2)$$

**Interpolation linéaire** l'interpolation linéaire se traduit par un rééchantillonnage du signal qui n'est pas à bande limitée! En effet, interpoler linéairement entre les échantillons du signal revient à convoluer le signal échantillonné par une fonction triangulaire  $w(t)$  de hauteur 1 et de largeur deux périodes d'échantillonnage. Là encore on a :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\delta(t-n) \star w(t) \quad (2.3)$$

Cette opération donne en sortie un signal à temps continu  $\tilde{x}(t)$  dont le spectre est le spectre du signal original périodisé (à cause de l'échantillonnage), et multiplié par la transformée de Fourier de la fonction triangulaire, un sinus cardinal au carré. Le signal à temps continu  $\tilde{x}(t)$  est ensuite ré-échantillonné avec une période d'échantillonnage  $(1-\alpha)\Delta T$  et cela sans filtrage passe-bas préalable. Ce ré-échantillonnage qui n'est pas à bande limitée produit donc un repliement spectral mais moindre que dans le cas de l'interpolation par phase fractionnaire en raison des lobes secondaires plus faible du  $\text{sin}C^2$ . Pour les signaux audio dont le spectre est principalement localisé en basse-fréquence, ce repliement spectral ne pose pas de problème majeur (Rossum 93), toutefois on prend souvent la précaution de fabriquer des formes d'onde dont la bande de fréquences d'énergie significative est situé en deçà de la fréquence réduite 0.25.

## 2.4 Synthèses par sommation

Ce type de synthèse consiste à sommer des composantes élémentaire. Le qualificatif d'"additive" est parfois d'avantage employé lorsque les motifs élémentaires sont sinusoïdaux. La synthèse granulaire et la synthèse à forme d'onde formantiques (FOF) sont d'autres exemples de synthèse par sommation.

### 2.4.1 Synthèse additive

C'est l'une des plus anciennes méthodes de synthèse dans laquelle le signal est obtenu en additionnant des sinusoïdes contrôlées dynamiquement en fréquence, en amplitude et en phase. C'est une méthode simple, mais coûteuse en temps de calcul: un son de piano peut contenir plus de 150 harmoniques (notes basses) qu'il est nécessaire de synthétiser une à une. Cependant, la transformée de Fourier inverse permet d'accélérer le processus de synthèse: à partir des valeurs des fréquences et amplitudes à synthétiser, on génère le spectre de Fourier, puis par transformée inverse le signal synthétique. D'autre part, le nombre de paramètres de contrôle (amplitude et fréquence pour chaque sinusoïde) devient très élevé pour un son complexe, rendant sa manipulation difficile.

L'analyse correspondant à la synthèse additive peut être effectuée par transformée de Fourier, ou à l'aide de méthodes d'estimation spectrale paramétrique (ARMA, Prony, Matrix Pencil etc... (Laroche 93))

### 2.4.2 Synthèse granulaire et à FOF

La synthèse granulaire consiste à utiliser des motifs élémentaires localisés en temps et en fréquence. Ces motifs prennent la forme d'ondelettes. Les compositions qui utilisent ce type de synthèse prennent alors l'aspect de nuages de points du plan temps/fréquences, représentés sous forme de grains.

La synthèse par Formes d'Onde Formantiques s'appuie sur les résultats obtenu en traitement de la parole pour réaliser des synthèses vocales et notamment de voix chantée très performantes. Le conduit vocal est assimilé à un filtre, dont les résonances (ou formants) modulent le spectre de raies des productions vocales voisées. Le principe de la synthèse par FOF est de reproduire *dans le domaine temporel* l'effet de ce filtre en construisant sa réponse impulsionnelle par superposition des réponses élémentaires de chacun des filtres formantiques.

## 2.5 Synthèse par modèle physique et apparentés

Dans cette catégorie rentrent la synthèse dite de Karplus-Strong, du nom de ses initiateurs et les synthèses qui tendent à reproduire numériquement les équations d'évolution du système physique. Ces dernières ne seront pas développées ici; leur description étant spécifique de l'instrument ou du type d'instrument (on peut citer par exemple les sons de flûte (Verge 95)).

### 2.5.1 Synthèse de Karplus-Strong

Cette méthode de synthèse a été étudiée par deux étudiants de Stanford, Karplus et Strong, en 1983. C'est une méthode bien adaptée pour les sons harmoniques, et en particulier les sons de cordes (guitare, piano etc...) Sa simplicité permet une implémentation en temps réel aisée. Avec quelques améliorations, on peut obtenir des synthèses de bonne qualité (Jaffe 83).

Le premier modèle est le suivant:

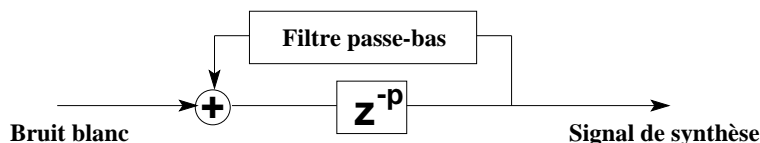


FIG. 2.5 – *Modèle simple de résonateur numérique*

Il s'agit d'un filtre alimenté par une bouffée de bruit blanc. Le filtre dans sa version la plus simple est constitué d'une boucle récursive dans laquelle est introduit une cellule passe-bas. Une cellule passe-bas simple couramment utilisée est du type:

$$y_n = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$$

On peut montrer que dans ces conditions, la réponse impulsionnelle du filtre fait apparaître des sinusoïdes décroissantes en rapport harmonique, la (pseudo) période du signal étant de  $pT + T/2$  secondes (où  $T$  représente le pas d'échantillonnage). On voit donc que le paramètre  $p$  peut être utilisé pour contrôler la fréquence du signal généré. De plus, la présence du filtre passe-bas dans la boucle provoque une atténuation plus rapide des hautes fréquences. On peut également évaluer l'amortissement de chaque partiel par:

$$\alpha_i = (\cos(\pi f_i T))^{1/(p+1/2)}$$

C'est le terme par lequel l'amplitude du partiel est multipliée à chaque échantillon. On voit que plus  $f_i$  est proche de  $F_e/2$ , plus le cosinus est petit, et plus le partiel est amorti. Ainsi

- La fréquence d'un partiel est fonction de la longueur du retard total (délai  $z^{-p}$  plus délai du passe-bas).
- L'amortissement d'un partiel de fréquence  $f_i$  est fonction du gain de la boucle de feedback à la fréquence considérée.

Le filtre passe-bas permet donc de reconstituer l'amortissement plus rapide des partiels de haute fréquence que l'on observe dans les cordes en régime libre.

En général, ce filtre est excité par une impulsion de bruit blanc de courte durée, ce qui donne un aspect plus naturel à l'attaque.

Un défaut de cette implémentation est la quantification des fondamentaux possibles. Les fréquences fondamentales réalisable s'écrivent:

$$f = \frac{Fe}{N + \frac{1}{2}} \quad \text{où } Fe \text{ représente la fréquence d'échantillonnage}$$

Puisque  $p$  est entier, l'ensemble des fréquences fondamentales est quantifié d'une façon malheureusement incompatible avec les applications musicales. Une façon de remédier à ce problème consiste à introduire dans la boucle de feedback une cellule passe-tout :

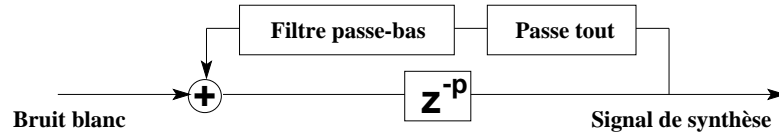


FIG. 2.6 – *Modèle amélioré pour réaliser des périodes non entières*

On choisit une cellule du premier ordre pour sa simplicité:

$$H(z) = \frac{c + z^{-1}}{1 + cz^{-1}} \quad \text{avec } |c| < 1$$

Le paramètre  $c$  contrôle le comportement en phase du passe-tout. Puisque ce dernier ne modifie pas le gain de la boucle de feedback, les amortissements des partiels sont inchangés. En revanche, le passe-tout introduit un déphasage qui correspond à un retard de phase. Ainsi la longueur de la boucle de feedback n'est plus de  $pT + T/2$  mais de  $pT + T/2 + \text{Arg}(H(e^{j\omega}))/\omega$ . La fréquence fondamentale de la réponse impulsionnelle peut ainsi être ajustée avec une grande précision grâce au paramètre  $c$ . Ci-dessous est représenté le délai introduit par le passe-tout pour des valeurs de  $c$  comprises entre  $-0.9$  et  $0.9$ .

Enfin, l'amortissement des hautes fréquences peut être mieux contrôlé par l'utilisation d'un filtre passe-bas légèrement plus élaboré.

Ce type de synthèse se révèle très efficace pour la simulation de cordes de guitares, etc... Voir (Jaffe 83) pour plus de détail sur cette méthode de synthèse.

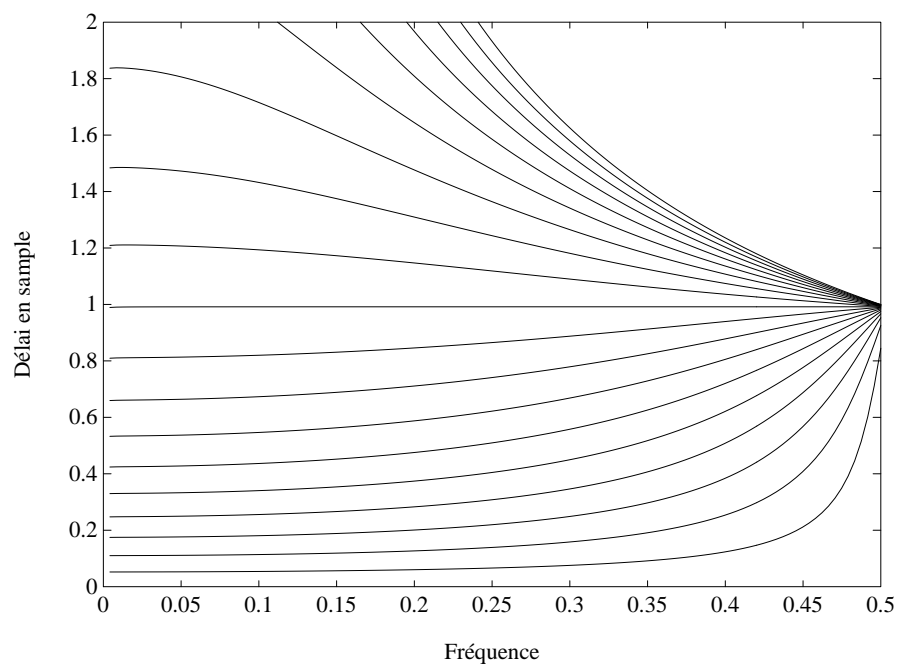


FIG. 2.7 – *Retard introduit par le passe-tout*

# Bibliographie

- J. Chowning. The synthesis of complex audio spectra by means of frequency modulation. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 21 (7), pp. 526–534, 1973.
- D. A. Jaffe and J. O. Smith. Extensions of the karplus-strong plucked-string algorithm. *Computer Music J.*, vol. 7 (2), pp. 56–69, Summer 1983.
- J. Laroche. The use of the matrix pencil method for the spectrum analysis of musical signals. *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 94 (4), pp. 1958–1965, Oct 1993.
- C. Roads. *L'audionumérique*. DUNOD, Paris, 1998.
- D. Rossum. Constraint based audio interpolators. *IEEE ASSP Workshop on app. of sig. proc. to audio and acous.*, 1993.
- M.P. Verge. *Aeroacoustics of Confined Jets*. PhD thesis, TU Eindhoven, 1995.